Кривые и поверхности 2-го порядка

- Аффинные гиперквадрики в R^n
- Канонический вид
- Кривые второго порядка
- Классификация кривых
- Поверхности второго порядка
- Классификация поверхностей

Master algebra

Аффинные гиперквадрики в R^n

◁Предыдущая | Содержание | Следующая▷

Аффинные гиперквадрики в R^n

Множество точек $x \in R^n$, координаты которых удовлетворяют уравнению:

$$q(x) + b(x) + c = 0 \ ,$$

где $q(x) = \sum_i a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij}x_ix_j$ – квадратичная форма (КФ), $b(x) = b_1x_1 + \ldots + b_nx_n$ – линейная форма (ЛФ), а c – число, называется аффинной гиперквадрикой или аффинной гиперповерхностью 2-го порядка (далее Г)

Пример: $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_3^2 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 5 = 0$ – Г в R^3

Г в R^3 называются поверхностями, Г в R^2 – кривыми.

Теорема классификации

Для любой Г найдется система координат (называемая канонической), в которой уравнение Г имеет канонический вид:

$$q(y) = a_1y_1^2 + \ldots + a_ry_r^2 + y_{r+1} = 0 \ ,$$ где $a_i = \pm 1$ или

$$q(y) = a_1y_1^2 + \ldots + a_ry_r^2 + a = 0 \ ,$$ где $a_i = \pm 1, \ a = 1; 0$

Число r назовем рангом Г.

Пример 1: $y_1^2 - y_2^2 + y_3 = 0$ (гиперболический параболоид, $r = 2$)
Пример 2: $y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + 1 = 0$ (двуполостный гиперболоид, $r = 3$)

Аффинная классификация кривых

$r = 2$

$x^2 + y^2 = 0$ (мним. пара перес. прям.)

$x^2 - y^2 = 0$ (пара перес. прям.)

$x^2 + y^2 = 1$ (эллипс)

$x^2 - y^2 = 1$ (гипербола)

$x^2 + y^2 = -1$ (мнимый эллипс)

$r = 1$

$x^2 = 0$ (пара совп. прям.)

$x^2 = 1$ (пара парал. прям.)

$x^2 = -1$ (мним. пара парал. прям.)

$x^2 + y = 0$ (парабола)

Аффинная классификация поверхностей

- Ранг 3
  - $\star$ $x^2+y^2+z^2=0$ – мнимый конус ($(3;0),\ (0;3),\ a=0,\ \{(0;0;0)\}$)
  - $\star$ $x^2+y^2+z^2+1=0$ – мнимый эллипсоид ($(3;0),\ a=1,\ \{\emptyset\}$)
  - $\star$ $x^2+y^2+z^2-1=0$ – эллипсоид ($(0;3),\ a=1$)
  - $\star$ $x^2+y^2-z^2=0$ – конус ($(2;1),\ (1;2),\ a=0$)
  - $\star$ $x^2+y^2-z^2+1=0$ – двуполостный гиперболоид ($(2;1),\ a=1$)
  - $\star$ $x^2+y^2-z^2-1=0$ – однополостный гиперболоид ($(1;2),\ a=1$)

Аффинная классификация поверхностей

- Ранг 2

⋆ $x^2 + y^2 + z = 0$ – эллиптический параболоид ($(2;0),\ (0;2)$)
⋆ $x^2 - y^2 + z = 0$ – гиперболический параболоид ($(1;1)$)
⋆ $x^2 + y^2 = 0$ – пара мнимых пересекающихся плоскостей ($(2;0),\ (0;2),\ a = 0$, {ось z})
⋆ $x^2 + y^2 + 1 = 0$ – мнимый эллиптический цилиндр ($(2;0),\ a = 1,\ \{\emptyset\}$)
⋆ $x^2 + y^2 - 1 = 0$ – эллиптический цилиндр ($(0;2),\ a = 1$)
⋆ $x^2 - y^2 = 0$ – пара пересекающихся плоскостей ($(1;1),\ a = 0$)
⋆ $x^2 - y^2 - 1 = 0$ – гиперболический цилиндр ($(1;1),\ a = 1$)

Аффинная классификация поверхностей

- Ранг 1

  ⋆ $x^2 + z = 0$ – параболический цилиндр $((1;0),\ (0;1))$

  ⋆ $x^2 = 0$ – пара совпадающих плоскостей $((1;0),\ (0;1),\ a = 0$, {плоскость yz})

  ⋆ $x^2 + 1 = 0$ – пара мнимых параллельных плоскостей $((1;0),\ a = 1,\ \{\emptyset\})$

  ⋆ $x^2 - 1 = 0$ – пара параллельных плоскостей $((0;1),\ a = 1)$

Пример приведения к каноническому виду

Уравнение поверхности:

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4xy + 4yz - 8xz - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$$

Выделяем полный квадрат (см. пример к методу Лагранжа):

$$(2x - y - 2z)^2 - 28x + 2y + 16z + 45 = 0$$

Замена:

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= x' \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

Получим: $x'^2 - 14x' - 12y' - 12z' + 45 = 0$