1 Комплексные числа

Комплексные числа – это выражения вида $a + ib$, где $i^2 = -1$. Комплексное число может быть обозначено точкой плоскости с координатами $(a,\ b)$.

Сумма комплексных чисел: $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$

Произведение комплексных чисел: $(a+ib)\cdot(c+id) = (ac-bd)+i(ad + bc)$

Обратное комплексное число: $(a + ib)^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$

Пусть $z = a + ib$ – комплексное число. Тогда a – вещественная часть z, обозначение: $a = \mathrm{Re}\, z$, а b мнимая часть z, обозначение: $b = \mathrm{Im}\, z$

Сопряженное комплексное число: $\overline{z} = a - ib$. Формулы для сопряженных чисел:

$$\begin{aligned}
\overline{(z_1 + z_2)} &= \overline{z_1} + \overline{z_2} \\
\overline{(z_1 \cdot z_2)} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\
\overline{z^n} &= \overline{z}^n \\
z + \overline{z} &= 2a \\
z - \overline{z} &= 2b
\end{aligned}$$

Модуль комплексного числа: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

Аргумент комплексного числа: $\arg z = \varphi,\ \cos\varphi = \frac{a}{r},\ \sin\varphi = \frac{b}{r},\ \varphi \in [0, 2\pi)$, $\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{b}{a}$. Четверть определяется по знакам a и b, например: $a > 0,\ b < 0 \Rightarrow \varphi \in$ IV четверти.

Тригонометрическая форма комплексного числа: $z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, т.к. $a = r\cos\varphi$ и $b = r\sin\varphi$

Экспоненциальная форма комплексного числа: $z = r \cdot e^{i\varphi}$

Выражение $e^{i\varphi}$ мы понимаем просто как сокращенную форму записи выражения $\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$. Легко убедиться, что с $e^{i\varphi}$ можно обращаться как с обычной степенью, например:

$$\begin{aligned}
e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \cdot (\cos\psi + i \cdot \sin\psi) = \\
= (\cos\varphi \cdot \cos\psi - \sin\varphi \cdot \sin\psi) + i \cdot (\cos\varphi \cdot \sin\psi + \sin\varphi \cdot \cos\psi) = \\
= \cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi) = e^{i(\varphi+\psi)}
\end{aligned}$$

Экспоненциальная форма удобна для умножений, делений, возведения в степень и извлечения корня. Обычная форма удобна для сложений и вычитаний. **Необходимо научиться**

быстро переходить от одного представления комплексного числа к любому другому.

Формула Муавра: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ или в экспоненциальной форме: $z^n = (r \cdot e^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$

Степени мнимой единицы: $i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$

1.1 Корень n-ой степени из комплексного числа

Существует ровно n различных корней n-ой степени из комплексного числа. Все они расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$.

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot (\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n}) = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n} i} \qquad (1)$$

где $k = 0; 1; \ldots; n-1$

Корни n-ой степени из единицы составляют циклическую группу порядка n: $\sqrt[n]{1} = \epsilon_k = e^{\frac{2\pi k}{n} i},\ k = 0; \ldots; n-1$

$$z_k = z_0 \cdot \epsilon_k$$

$$\sum_{k=0}^{n} \epsilon_k = 0$$

Для нахождения квадратных корней из комплексного числа $z = a + ib$ нужно решить систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Числа $w_1 = x_1 + iy_1,\ w_2 = x_2 + iy_2$ и есть квадратные корни из числа z

2 Примеры

2.1 Вычислим $\frac{1-i}{3+2i}$

$$\begin{aligned} \frac{1-i}{3+2i} &= \frac{1-i}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{(1-i) \cdot (3-2i)}{(3+2i) \cdot (3-2i)} = \\ &= \frac{(1 \cdot 3 - (-1) \cdot (-2)) - i \cdot (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3)}{3^2 - (2i)^2} = \frac{1-5i}{9-(-4)} = \frac{1-5i}{13} = \frac{1}{13} - \frac{5}{13} i \end{aligned}$$

2.2 Вычислим $(1-i)^{10}$

$z = 1 - i$

$z = a + ib$, где, в нашем случае, $a = 1,\ b = -1$

$r = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

обозначим $\arg z = \psi$

$\cos\psi = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\psi = \frac{b}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ следовательно: $\arg z = \frac{7\pi}{4}$

Экспоненциальная форма:

$$z = r \cdot e^{i\psi} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{7\pi}{4}i}$$

И, наконец, отбрасывая период:

$$z^{10} = (\sqrt{2} \cdot e^{\frac{7\pi}{4}i})^{10} = 32 \cdot e^{\frac{70\pi}{4}i} = 32 \cdot e^{(\frac{6\pi}{4} + 8\cdot 2\pi)i} = 32 \cdot e^{\frac{3\pi}{2}i} = 32(\cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{2}) = -32i$$

2.3 Вычислим $\sqrt[4]{-i}$

$z = -i$

$r = |z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$

$\cos\psi = \frac{0}{1} = 0, \sin\psi = \frac{-1}{1} = -1$ следовательно: $\arg z = \frac{3\pi}{2}$

Экспоненциальная форма:

$$z = 1 \cdot e^{\frac{3\pi}{2}i} = e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

Применим формулу (1):

$$\sqrt[4]{-i} = \sqrt[4]{1} \cdot e^{(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{4})i} = e^{(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2})i}$$

Итак, перечислим все корни:

$$\begin{aligned}
z_0 &= e^{\frac{3\pi}{8}i} = \cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8} \\
z_1 &= e^{\frac{7\pi}{8}i} = \cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8} \\
z_2 &= e^{\frac{11\pi}{8}i} = \cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8} \\
z_3 &= e^{\frac{15\pi}{8}i} = \cos\frac{15\pi}{8} + i\sin\frac{15\pi}{8}
\end{aligned}$$

Фадеев, Соминский, гл.2 "Комплексные числа", пар. 1;2