Комплексные числа (слайды)

- Определения
- Сопряжение
- Модуль и аргумент
- Тригонометрическая и экспоненциальная форма
- Формула Муавра
- Корень n-ой степени из комплексного числа
- Корни n-ой степени из единицы
- Квадратные корни
- Пример 1. Деление
- Пример 2. Возведение в степень
- Пример 3. Извлечение корня

Определения

Определения

Комплексные числа – это выражения вида $a + ib$, где $i^2 = -1$. Комплексное число может быть обозначено точкой плоскости с координатами $(a,\ b)$.

Сумма комплексных чисел: $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$

Произведение комплексных чисел:
$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

Обратное комплексное число: $(a + ib)^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$

Пусть $z = a + ib$ – комплексное число. Тогда a – вещественная часть z, обозначение: $a = \operatorname{Re} z$, а b мнимая часть z, обозначение: $b = \operatorname{Im} z$

Сопряжение

Сопряжение

Сопряженное комплексное число: $\overline{z} = a - ib$. Формулы для сопряженных чисел:

$$\begin{aligned}
\overline{(z_1 \pm z_2)} &= \overline{z_1} \pm \overline{z_2} \\
\overline{(z_1 \cdot z_2)} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\
\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \\
\overline{z^n} &= \overline{z}^n \\
z + \overline{z} &= 2\,\mathrm{Re} z = 2a \\
z - \overline{z} &= 2\,\mathrm{Im} z = 2b \\
\arg \overline{z} &= 2\pi - \arg z, \;\; |\overline{z}| = |z|
\end{aligned}$$

Модуль и аргумент

Модуль и аргумент

Модуль комплексного числа: $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

Аргумент комплексного числа:
$\arg z = \varphi,\ \cos\varphi = \frac{a}{r},\ \sin\varphi = \frac{b}{r},\ \varphi \in [0, 2\pi)$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$. Четверть определяется по знакам a и b, например: $a > 0,\ b < 0 \Rightarrow \varphi \in$ IV четверти.

Тригонометрическая и экспоненциальная форма

Тригонометрическая и экспоненциальная форма

Тригонометрическая форма комплексного числа:
$z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, т.к. $a = r\cos\varphi$ и $b = r\sin\varphi$

Экспоненциальная форма комплексного числа: $z = r \cdot e^{i\varphi}$

Имеют место формулы:

$$e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi},\ e^{i(\varphi-\psi)} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\psi}},\ (e^{i\varphi})^n = e^{i\varphi n}$$

Тригонометрическая (экспоненциальная) форма удобна для умножений, делений, возведения в степень и извлечения корня. Обычная форма удобна для сложений и вычитаний.

Экспоненциальная форма

Экспоненциальная форма

Выражение $e^{i\varphi}$ мы понимаем просто как сокращенную форму записи выражения $\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi$. Легко убедиться, что с $e^{i\varphi}$ можно обращаться как с обычной степенью.

$$e^{i\varphi}\cdot e^{i\psi} = (\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)\cdot(\cos\psi + i\cdot\sin\psi) =$$

$$= (\cos\varphi\cdot\cos\psi - \sin\varphi\cdot\sin\psi) + i\cdot(\cos\varphi\cdot\sin\psi + \sin\varphi\cdot\cos\psi) =$$

$$= \cos(\varphi+\psi) + i\cdot\sin(\varphi+\psi) = e^{i(\varphi+\psi)}$$

Необходимо научиться быстро переходить от одного представления комплексного числа к любому другому.

Формула Муавра

Формула Муавра

Формула Муавра: $z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
или в экспоненциальной форме: $z^n = (r\cdot e^{i\varphi})^n = r^n\cdot e^{in\varphi}$

Степени мнимой единицы:
$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i$

Master algebra

Корень n-ой степени из комплексного числа

Корень n-ой степени из комплексного числа

Существует ровно n различных корней n-ой степени из комплексного числа. Все они расположены в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$.

$$z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot (\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}) = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n} i} \qquad (1)$$

где $k = 0; 1; \ldots; n-1$

Корни n-ой степени из единицы

Корни n-ой степени из единицы

Корни n-ой степени из единицы составляют циклическую группу порядка n: $\sqrt[n]{1} = \epsilon_k = e^{\frac{2\pi k}{n} i},\ k = 0; \ldots ; n-1$

$$z_k = z_0 \cdot \epsilon_k$$

$$\sum_{k=0}^{n} \epsilon_k = \sum_{k=0}^{n} z_k = 0$$

Квадратные корни

Master algebra

Квадратные корни

Для нахождения квадратных корней из комплексного числа $z = a + ib$ нужно решить систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

Числа $w_1 = x_1 + iy_1,\ w_2 = x_2 + iy_2$ и есть квадратные корни из числа z

Пример 1. Деление

Пример 1. Деление

Вычислим $\frac{1-i}{3+2i}$

$$\begin{aligned}\frac{1-i}{3+2i} &= \frac{1-i}{3+2i}\cdot\frac{3-2i}{3-2i} = \frac{(1-i)\cdot(3-2i)}{(3+2i)\cdot(3-2i)} = \\ &= \frac{(1\cdot 3-(-1)\cdot(-2))-i\cdot(1\cdot 2+1\cdot 3)}{3^2-(2i)^2} = \\ &= \frac{1-5i}{9-(-4)} = \frac{1-5i}{13} = \frac{1}{13}-\frac{5}{13}i\end{aligned}$$

Пример 2. Возведение в степень

Пример 2. Возведение в степень

Вычислим $(1-i)^{10}$

$z = 1 - i$. $z = a + ib$, где, в нашем случае, $a = 1,\ b = -1$

$r = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

обозначим $\arg z = \psi$. Тогда $\operatorname{tg}\psi = \frac{b}{a} = -1, \psi \in IV$ четв. (т.к. $a > 0,\ b < 0$), следовательно: $\arg z = \frac{7\pi}{4}$

Тригонометрическая и экспоненциальная форма:

$$z = r \cdot (\cos\psi + i \cdot \sin\psi) = r \cdot (\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{7\pi}{4}) = r \cdot e^{i\psi} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{7\pi}{4}i}$$

И, наконец, отбрасывая период:

$$z^{10} = (\sqrt{2} \cdot e^{\frac{7\pi}{4}i})^{10} = 32 \cdot e^{\frac{70\pi}{4}i} = 32 \cdot e^{(\frac{6\pi}{4} + 8 \cdot 2\pi)i} = 32 \cdot e^{\frac{3\pi}{2}i} =$$

$$32(\cos\frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{3\pi}{2}) = -32i$$

Пример 3. Извлечение корня

Пример 3. Извлечение корня

Вычислим $\sqrt[4]{-i}$

$z=-i$

$r=|z|=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$

$\cos\psi=\frac{0}{1}=0, \sin\psi=\frac{-1}{1}=-1$ следовательно: $\arg z=\frac{3\pi}{2}$

Экспоненциальная форма:

$$z=1\cdot e^{\frac{3\pi}{2}i}=e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

Применим формулу (1):

$$\sqrt[4]{-i}=\sqrt[4]{1}\cdot e^{(\frac{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}{4})i}=e^{(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2})i}$$

Пример 3. Извлечение корня

Итак, перечислим все корни:

$$
\begin{aligned}
z_0 &= e^{\frac{3\pi}{8}i} = \cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\\
z_1 &= e^{\frac{7\pi}{8}i} = \cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\\
z_2 &= e^{\frac{11\pi}{8}i} = \cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}\\
z_3 &= e^{\frac{15\pi}{8}i} = \cos\frac{15\pi}{8} + i\sin\frac{15\pi}{8}
\end{aligned}
$$

Фадеев, Соминский, гл.2 "Комплексные числа", пар. 1;2