

1 Примеры вычисления определителя

1.1 Пример

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Преобразования (цифры в скобках -- номера строк, стрелка указывает в какую строку записываем результат):

$3 \cdot (2) - (1) \rightarrow (2)$ детерминант умножается на $\frac{1}{3}$
 $3 \cdot (3) - (1) \rightarrow (3)$ детерминант умножается на $\frac{1}{3}$
 $3 \cdot (4) - (1) \rightarrow (4)$ детерминант умножается на $\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{27} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

Преобразования:

$4 \cdot (3) - (2) \rightarrow (3)$ детерминант умножается на $\frac{1}{4}$
 $4 \cdot (4) - (2) \rightarrow (4)$ детерминант умножается на $\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{16} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 30 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 30 \end{vmatrix}$$

Преобразования:

$5 \cdot (4) - (3) \rightarrow (4)$ детерминант умножается на $\frac{1}{5}$

$$\frac{1}{27} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 30 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 144 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \frac{3 \cdot 8 \cdot 30 \cdot 144}{27 \cdot 16 \cdot 5} = 48$$

1.2 Пример

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

Разложим определитель по 2-ой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 10 \\ 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 10 \\ 1 & 10 & 20 \end{vmatrix} + \\
 + (-1)^{2+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 20 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4} \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{vmatrix} = \\
 = (-1) \cdot 6 + 2 \cdot 14 - 3 \cdot 11 + 4 \cdot 3 = 1$$

1.3 Пример

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$$

Вычтем из третьей строки четвертую и запишем результат в третью:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & z & z \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$$

Вычтем из третьего столбца четвертый и запишем результат в третий:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 1 & 1 & z & 1-z \end{vmatrix}$$

Разложим определитель по третьему столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 1 & 1 & z & 1-z \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \cdot z \cdot \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix}$$

Разложим определитель по последней строке:

$$-z \cdot \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = -z \cdot z \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1+x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = -z^2 \cdot (1-x^2-1) = z^2 \cdot x^2$$

1.4 Пример

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Прибавим первую строку ко всем строкам, начиная со второй:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}$$

Так как определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов, искомый определитель равен $n!$.