1 Определители (детерминанты)

Детерминант квадратной матрицы – это алгебраическая сумма всевозможных произведений элементов матрицы, лежащих в различных строках и столбцах.

Детерминант n-ого порядка – это число, которое ставится в соответствие квадратной матрице $n \times n$ и вычисляется по следующей формуле:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

где $sgn(\sigma)$ – четность перестановки σ

Пример : для произведения $a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{44}$ – перестановка $\sigma = (2314)$ и $sgn(\sigma) = +1$, а для произведения $a_{14} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{41}$ – перестановка $\sigma = (4231)$ и $sgn(\sigma) = -1$.

Обозначим строки матрицы $\vec{a_1} \ldots \vec{a_n}$ и будем писать также

$$\det A = \det(\vec{a_1}; \ldots; \vec{a_n})$$

Определитель матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

обозначается:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Свойства определителя:

1. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов

2. При перестановке строк (столбцов) определитель меняет знак

3. Определитель с нулевой строкой (столбцом) равен 0

4. Если прибавить к одной строке (столбцу) другую строку (столбец) умноженную на число, то определитель не изменится

5. Если строку определителя умножить на число, то весь определитель умножится на это число
6. Определитель с пропорциональными строками (столбцами) равен 0
7. $\det(\vec{a_1};\ldots;\vec{a_i}+\vec{b_i};\ldots;\vec{a_n}) = \det(\vec{a_1};\ldots;\vec{a_i};\ldots;\vec{a_n})+\det(\vec{a_1};\ldots;\vec{b_i};\ldots;\vec{a_n})$
8. При транспонировании определитель не изменяется.
$$\det A^T = \det A$$
9. Определитель произведения матриц равен произведению определителей
$$\det A \cdot \det B = \det(A \cdot B)$$
10. Определитель обратной матрицы обратен определителю исходной.
$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

Предупреждение: при элементарных преобразованиях с определителями, если строка, в которую пишется результат, умножается на число, то весь определитель нужно разделить на зто число! При перестановке строк определитель меняет знак!

Если в матрице вычеркнуть i-ую строку и j-ый столбец и вычислить определитель оставшейся части (т.е. матрицы размером $(n-1)\times(n-1)$), то полученное число называется главным минором и обозначается M_{ij}.

Число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ – называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij}.

Формула разложения определителя по i-ой строке (столбцу):
$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$$
$$\det A = a_{1i} \cdot A_{1i} + \ldots + a_{ni} \cdot A_{ni}$$

Другими словами, определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Правило Крамера:

Правило Крамера применимо лишь к квадратным определенным системам.

Пусть дана квадратная система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 & + & \dots & + & a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ a_{n1} \cdot x_1 & + & \dots & + & a_{nn} \cdot x_n & = & b_n \end{cases}$$

Обозначим столбцы матрицы коэффициентов через $\vec{a_1} \dots \vec{a_n}$, а столбец правых частей через $\vec{b}$, тогда имеют место формулы Крамера:

$$x_i = \frac{\det(\vec{a_1}; \dots; \vec{b}; \dots; \vec{a_n})}{\det(\vec{a_1}; \dots; \vec{a_i}; \dots; \vec{a_n})}$$

Другими словами, значение i-ой неизвестной равно отношению двух определителей: в знаменателе определитель системы, а в числителе определитель, полученный заменой i-ого столбца определителя системы столбцом из свободных членов.