

1 Евклидовы пространства

Симметричная, невырожденная, положительно определенная билинейная форма на линейном пространстве L над полем F называется **скалярным произведением**.

Другими словами, скалярное произведение на L это отображение

$$(\cdot, \cdot) : L \times L \rightarrow F,$$

удовлетворяющее следующим условиям:

- для любых $a, b \in F$; $x, y, z \in L$:
 $(ax + by, z) = a(x, z) + b(y, z)$
 $(z, ax + by) = a(z, x) + b(z, y)$ (билинейность)
- для любых $x, y \in L$: $(x, y) = (y, x)$ (симметричность)
- для любого $x \in L$: $(x, x) \geq 0$ (положительная определенность)
- для любого $x \in L$: $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (невырожденность)

Линейное пространство L с заданным на нем скалярным произведением называется **евклидовым пространством**.

Два вектора $x, y \in L$ называются **ортогональными**, если $(x, y) = 0$.

Нормой вектора x называется число $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Имеет место формула:

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$$

Углом между векторами называется число α ($0 \leq \alpha \leq \pi$) :

$$\alpha = \angle(xy) = \arccos \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$$

Базис $e_1, \dots, e_n$ в L — называется **ортогональным**, если $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$ и **нормированным**, если $(e_i, e_i) = 1$

Ортогональный и нормированный базис называется **ортонормированным**.

Для любого базиса $e_1, \dots, e_n$ матрица $G = (g_{ij})$, где $g_{ij} = (e_i, e_j)$ — называется **матрицей Грама** базиса $e_1, \dots, e_n$.

- Матрица Грама симметрична
- Матрица Грама ортогонального базиса диагональна и наоборот
- Матрица Грама ортонормированного базиса единична и наоборот

Скалярное произведение векторов выражается через матрицу Грама базиса:

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} x_i y_j ,$$

где $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ — координаты векторов $x, y \in L$ в базисе. А значит, в случае ортонормированного базиса, имеем:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i .$$

2 Процесс ортогонализации Грамма-Шмидта

Пусть задан базис $e_1, \dots, e_n$ в L , тогда возможно построить ортонормированный базис $g_1, \dots, g_n$ в L , удовлетворяющий условию:

$$\langle e_1, \dots, e_i \rangle = \langle g_1, \dots, g_i \rangle \text{ для всех } i,$$

т.е. линейные оболочки первых i векторов совпадают для всех i .

Построение проводится рекурсивно, причем сперва строим ортогональную систему, которую после нормируем:

$$\begin{aligned} g'_1 &= e_1 \\ g'_2 &= e_2 - \frac{(e_2, g'_1)}{(g'_1, g'_1)} \cdot g'_1 \\ &\vdots \\ g'_n &= e_n - \frac{(e_n, g'_1)}{(g'_1, g'_1)} \cdot g'_1 - \dots - \frac{(e_n, g'_{n-1})}{(g'_{n-1}, g'_{n-1})} \cdot g'_{n-1} \end{aligned}$$

Нормируем:

$$g_k = \frac{g'_k}{\|g'_k\|}$$

Легко видеть, что полученная система векторов $g_1, \dots, g_n$ ортонормирована.

3 Примеры

3.1 Ортонормировать базис

$$e_1 = (2; 0; 0), \quad e_2 = (3; 4; 0), \quad e_3 = (1; -1; 1)$$

$$\begin{aligned} g'_1 &= e_1 = (2; 0; 0) \\ g'_2 &= e_2 - \frac{(e_2, g'_1)}{(g'_1, g'_1)} \cdot g'_1 = (3; 4; 0) - \frac{((3; 4; 0), (2; 0; 0))}{((2; 0; 0), (2; 0; 0))} \cdot (2; 0; 0) = \\ &= (3; 4; 0) - \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0}{2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0} \cdot (2; 0; 0) = (3; 4; 0) - \frac{3}{2} \cdot (2; 0; 0) = \\ &= (3; 4; 0) - (3; 0; 0) = (0; 4; 0) \\ g'_3 &= e_3 - \frac{(e_3, g'_1)}{(g'_1, g'_1)} \cdot g'_1 - \frac{(e_3, g'_2)}{(g'_2, g'_2)} \cdot g'_2 = \\ &= (1; -1; 1) - \frac{((1; -1; 1), (2; 0; 0))}{((2; 0; 0), (2; 0; 0))} \cdot (2; 0; 0) - \frac{((1; -1; 1), (0; 4; 0))}{((0; 4; 0), (0; 4; 0))} \cdot (0; 4; 0) = \\ &= (1; -1; 1) - \frac{2}{4} \cdot (2; 0; 0) - \frac{-4}{16} \cdot (0; 4; 0) = (1; -1; 1) - (1; 0; 0) + (0; 1; 0) = (0; 0; 1) \end{aligned}$$

Далее: $\|g'_1\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} = 2$, $\|g'_2\| = 4$, $\|g'_3\| = 1$

И, наконец:

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{(2; 0; 0)}{2} = (1; 0; 0) \\ g_2 &= \frac{(0; 4; 0)}{4} = (0; 1; 0) \\ g_3 &= (0; 0; 1) \end{aligned}$$