Системы линейных уравнений

- Определение
- Матрица системы
- Типы систем
- Метод Гаусса
- Ступенчатый вид
- Определение типа системы
- Пример

Определение

Системой линейных уравнений с k уравнениями, n неизвестными, матрицей коэффицентов $A = (a_{ij})$ и вектором правых частей $b = (b_1 \ldots b_k)$ называется система:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + & \ldots & + & a_{kn}x_n & = & b_k \end{array} \right. \qquad (1)$$

Определение

Системой линейных уравнений с k уравнениями, n неизвестными, матрицей коэффицентов $A = (a_{ij})$ и вектором правых частей $b = (b_1 \dots b_k)$ называется система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + & \dots & + & a_{kn}x_n & = & b_k \end{cases} \tag{1}$$

Упорядоченный набор чисел $x' = (x'_1; \dots; x'_n)$ называется решением системы (1), если при подстановке этих чисел в систему все уравнения превращаются в равенства.

Матрица системы

Матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей системы. А матрица:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{array}\right)$$

расширенной матрицей системы.

Типы систем

- Несовместные системы — системы не имеющие решений

Типы систем

- Несовместные системы — системы не имеющие решений
- Совместные системы — системы имеющие решения

Типы систем

- Несовместные системы — системы не имеющие решений
- Совместные системы — системы имеющие решения
  - ⋆ Определенные системы — решение единственно

Типы систем

- Несовместные системы — системы не имеющие решений
- Совместные системы — системы имеющие решения
  - Определенные системы — решение единственно
  - Неопределенные системы — решений бесконечно много

Метод Гаусса

Метод Гаусса

Алгоритм последовательного исключения неизвестных:

- Найти первое неизвестное в первом уравнении
  - ⋆ Если нашли (коэффициент при неизвестном $\neq 0$): исключить неизвестное из остальных уравнений, используя "школьный" метод сложения и перейти к следующему неизвестному в следующем уравнении

Метод Гаусса

Алгоритм последовательного исключения неизвестных:

- Найти первое неизвестное в первом уравнении
  - ⋆ Если нашли (коэффициент при неизвестном $\neq 0$): исключить неизвестное из остальных уравнений, используя "школьный" метод сложения и перейти к следующему неизвестному в следующем уравнении
  - ⋆ Если не нашли (коэффициент $= 0$): поискать неизвестное в последующих уравнениях
    - ∗ Если нашли в последующем: поменять местами это уравнение с первым и перейти к исключению неизвестного (см. пред. пункт)
    - ∗ Если не нашли в последующих: перейти к следующему неизвестному в том же уравнении
- Повторять процесс пока не переберем все неизвестные

Ступенчатый вид

При преобразовании системы методом Гаусса множество решений системы не изменяется

Вид системы, полученный после применения к ней метода Гаусса, называется ступенчатым видом

В ступенчатом виде $i-$ое уравнение не содержит по крайней мере первые $i-1$ неизвестные. Первое неизвестное, входящее в это уравнение, называется главным

Неизвестные, не являющиеся главными, называются свободными

Число главных неизвестных называется рангом, а число свободных $-$ дефектом системы

Сумма дефекта и ранга системы равна числу неизвестных

Определение типа системы

Система несовместна тогда и только тогда, когда при применении метода Гаусса в некотором уравнении получается нулевая левая часть и ненулевая правая.

Определение типа системы

Система несовместна тогда и только тогда, когда при применении метода Гаусса в некотором уравнении получается нулевая левая часть и ненулевая правая.

Совместная система является определенной только тогда, когда все неизвестные – главные (нет свободных неизвестных, дефект равен 0, ранг равен числу неизвестных)

Определение типа системы

Система несовместна тогда и только тогда, когда при применении метода Гаусса в некотором уравнении получается нулевая левая часть и ненулевая правая.

Совместная система является определенной только тогда, когда все неизвестные – главные (нет свободных неизвестных, дефект равен 0, ранг равен числу неизвестных)

Совместная система является неопределенной только тогда, когда есть свободные неизвестные (не все неизвестные главные, дефект не равен 0, ранг меньше числа неизвестных)

Определение типа системы

Система несовместна тогда и только тогда, когда при применении метода Гаусса в некотором уравнении получается нулевая левая часть и ненулевая правая.

Совместная система является определенной только тогда, когда все неизвестные – главные (нет свободных неизвестных, дефект равен 0, ранг равен числу неизвестных)

Совместная система является неопределенной только тогда, когда есть свободные неизвестные (не все неизвестные главные, дефект не равен 0, ранг меньше числа неизвестных)

Найти общее решение системы – это значит выразить главные неизвестные через свободные. Выражаем, используя ступенчатый вид, и начинаем с последнего уравнения.

Пример

Исследовать систему:

$$\begin{cases} x_3 + 2x_4 = 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases} \tag{2}$$

Начинаем с неизвестного x_1. В первом уравнении оно отсутствует, зато есть во втором. Поменяем местами первые два уравнения (см. алгоритм):

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \\ x_3 + 2x_4 = 8 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

Пример

Исключим неизвестное x_1 из 3-го уравнения. Для этого умножим 3-е уравнение на 2 и вычтем из него 2-е, умноженное на 3:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \\ x_3 + 2x_4 = 8 \\ -11x_3 + 11x_4 = -11 \end{cases}$$

Теперь, согласно алгоритму мы должны перейти к следующему неизвестному (x_2) в следующем уравнении (во 2-м). Но x_2 отсутствует как во втором, так и в последующих (в 3-ем) уравнениях. Значит, мы переходим к следующему неизвестному (x_3) в том же уравнении (во 2-м). Исключим x_3 из последующих уравнений (т.е. из 3-го). Для этого прибавим к третьему уравнению 2-е, умноженное на 11.

Пример

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 5 \\ x_3 + 2x_4 = 8 \\ 33x_4 = 77 \end{cases}$$

Переходим к следующему неизвестному (x_4) в следующем (3-ем) уравнении. Выполнение алгоритма завершено, т. к. нет уравнений, из которых можно исключить x_4. Неизвестные $x_1,\ x_3,\ x_4$ – являются главными, неизвестное x_2 – свободным. Ранг системы равен 3, дефект равен 1. Система совместная, неопределенная. Для нахождения общего решения, начинаем выражать неизвестные, двигаясь от последнего уравнения к первому:

$$x_4 = 7/3;\ x_3 = 8 - 2x_4 = 8 - 14/3 = 10/3$$

$$2x_1 = 5 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -2x_2 - 8/3;\ x_1 = -x_2 - 4/3$$

Пример

Общее решение системы:

$$x = (-x_2 - 4/3;\ x_2;\ 10/3;\ 7/3)$$

При подстановке любых значений свободных неизвестных в общее решение системы получается некоторое частное решение системы. И наоборот, для любого частного решения системы найдутся значения свободных неизвестных, при которых получается это частное решение.

Например, при $x_2 = 0$ получается частное решение $x' = (-4/3;\ 0;\ 10/3;\ 7/3)$

Пример

Матричная запись вычислений (римские цифры – номера строк):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{2\cdot III - 3\cdot I \to III}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -11 & 11 & -11 \end{array}\right) \xrightarrow{11\cdot II + III \to III} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 33 & 77 \end{array}\right)$$