1 Общая теория систем линейных уравнений

1.1 Основные факты

Пусть

$$A \cdot x = b$$

– система линейных уравнений представленная в матричной форме.

Система называется однородной, если $b = 0$ и неоднородной, если $b \neq 0$

Множество решений однородной системы – подпространство, размерность которого равна дефекту системы.

Множество векторов b, для которых система имеет хотя бы одно решение – подпространство, размерность которого равна рангу системы.

Базис пространства решений однородной системы называется *фундаментальной системой решений*.

Множество решений неоднородной системы представляет из себя смежный класс по подпространству решений *соответствующей* (т.е. имеющей ту же матрицу коэффициентов) однородной системы.

Любое решение однородной системы может быть однозначно представлено как линейная комбинация решений из фундаментальной системы решений.

Если фиксировано некоторое произвольное решение неоднородной системы (так назыв. *частное решение*), то любое решение неоднородной системы может быть однозначно представлено как сумма этого частного решения и некоторой линейной комбинации решений из фундаментальной системы решений.

Разность любых двух решений неоднородной системы есть решение однородной системы.

Если к любому решению неоднородной системы прибавить любое решение однородной системы, получится решение той же неоднородной системы.

1.2 Способ нахождения фундаментальной системы решений

Чтобы найти фундаментальную систему решений данной однородной системы линейных уравнений, нужно:

1. Привести матрицу системы к ступенчатому виду методом Гаусса
2. Выделить свободные неизвестные – число решений в фундаментальной системе решений равно числу свободных неизвестных
3. Найти общее решение системы (т.е. выразить главные неизвестные через свободные)
4. Пусть, например, неизвестные x_2, x_5, x_6 являются свободными, тогда нужно найти три решения системы, последовательно приравнивая одну свободную неизвестную к единице, а другие к нулю. Другими словами, сперва положить

   $$x_2 = 1,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0$$

   и найти частное решение системы с этими значениями, потом положить

   $$x_2 = 0,\ x_5 = 1,\ x_6 = 0$$

   и найти частное решение системы с этими значениями, потом положить

   $$x_2 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 1$$

   и найти частное решение системы с этими значениями.

2 Примеры

2.1 Найти фундаментальную систему решений однородной системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

Ступенчатый вид матрицы системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Свободные неизвестные: $x_2,\ x_4$
Общее решение:
$4x_3 + 7x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = -\frac{7}{4}x_4$
$x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 3x_4 + x_3 - 2x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{4}x_4 - 2x_2$
Положим $x_2 = 1,\ x_4 = 0$, тогда $x_3 = -\frac{7}{4}\cdot 0 = 0$ и $x_1 = \frac{5}{4}\cdot 0 - 2\cdot 1 = -2$
Получаем первое решение фундаментальной системы: $(-2,\ 1,\ 0,\ 0)$
Положим $x_2 = 0,\ x_4 = 1$, тогда $x_3 = -\frac{7}{4}\cdot 1 = -\frac{7}{4}$ и $x_1 = \frac{5}{4}\cdot 1 - 2\cdot 0 = \frac{5}{4}$
Получаем второе решение фундаментальной системы: $(\frac{5}{4},\ 0,\ -\frac{7}{4},\ 1)$
Поскольку, заменив базисный вектор коллинеарным, мы снова получим базис того же подпространства, вместо последнего вектора мы можем взять $4\cdot(\frac{5}{4},\ 0,\ -\frac{7}{4},\ 1) = (5,\ 0,\ -7,\ 4)$
Итак, фундаментальная система решений: $\{(-2,\ 1,\ 0,\ 0),\ (5,\ 0,\ -7,\ 4)\}$