1 Билинейные и квадратичные формы

1.1 Определение и простейшие свойства

Билинейная форма на линейном пространстве L над полем F это отображение $B:\ L \times L \to F$, удовлетворяющее условиям билинейности:

$$\forall a, b \in F;\ \forall x, y, z \in L:\ B(ax + by, z) = aB(x, z) + bB(y, z);\ B(z, ax + by) = aB(z, x) + bB(z, y)$$

Билинейная форма называется **симметричной**, если $B(x, y) = B(y, x)$ и **кососимметричной**, если $B(x, y) = -B(y, x)$.

Пример: $B(x, y) = xy$ – билинейная форма на R^1, $B(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$, где $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R^2$ – кососимметричная билинейная форма на R^2, $B'(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ – симметричная билинейная форма на R^2.

Квадратичная форма на линейном пространстве L это отображение

$$q:\ L \to F,$$

для которого найдется билинейная форма B, удовлетворяющая условию: $B(x, x) = q(x)$.

Пример: $q(x) = x^2$ – квадратичная форма на R^1, $q(x) = x_1^2 - x_2^2$, где $x = (x_1, x_2) \in R^2$ – квадратичная форма на R^2.

Выражение в координатах (в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$) для билинейной формы имеет вид:

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_iy_j\ ,$$

где $b_{ij} = B(e_i, e_j)$.

Числа b_{ij} называются **коэффициентами** билинейной формы в базисе. Матрица $B = (b_{ij})$ – называется **матрицей** билинейной формы в базисе.

Для данной квадратичной формы q существует **единственная** симметричная билинейная форма Q, такая что $Q(x, x) = q(x)$. Матрица этой симметричной билинейной формы в некотором базисе называется матрицей квадратичной формы в этом базисе.

Выражение в координатах для квадратичной формы имеет вид:

$$q(x) = \sum_{i} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} 2a_{ij}x_ix_j\ , \tag{1}$$

где a_{ij} – коэффициенты формы Q.

Для квадратичной формы q выполняется равенство: $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$

Для любой квадратичной формы q существует такой базис (называемый каноническим), в котором форма имеет вид **суммы квадратов** или **канонический вид**:

$$q(x) = \sum_{i} a_ix_i^2\ ,$$

причем $a_i = \pm 1; 0$.

- Канонический вид определен однозначно, с точностью до перенумерования координат
- Канонический базис определен неоднозначно
- Количество $a_i = 1$ определено однозначно, обозначается r_+ и называется **положительным индексом инерции**
- Количество $a_i = -1$ определено однозначно, обозначается r_- и называется **отрицательным индексом инерции**
- Число $r = r_+ + r_-$ определено однозначно и называется **рангом** кв. формы

- Если ранг кв. формы равен количеству переменных, т.е. $r = \dim L$ или все $a_i \neq 0$, то кв. форма называется невырожденной

- если некоторый $a_i = 0$, то кв. форма называется вырожденной

- Матрицы квадратичной формы в различных базисах связаны равенством:

$$Q' = C^T Q C \ ,$$

  где $C -$ матрица перехода от старого базиса к новому, $Q -$ матрица формы в старом базисе, $Q' -$ в новом.

1.2 Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду

Метод Лагранжа позволяет определить канонический вид и найти канонический базис.

Алгоритм Лагранжа:

1. Если в (1) найдется $a_{ii} \neq 0$
   - взять все слагаемые в (1), содержащие x_i
   - выделить из них полный квадрат
   - сделать замену переменных: "полный квадрат"$= y_i, \ x_k = y_k$ при $k \neq i$
2. Если в (1) все $a_{ii} = 0$
   - найти $a_{ij} \neq 0$
   - сделать замену: $x_i = y_i + y_j, \ x_j = y_i - y_j, \ x_k = y_k$ при $k \neq i, k \neq j$
   - перейти к шагу 1
3. продолжать пока есть $a_{ij} \neq 0$

1.3 Привидение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием координат

Любая квадратичная форма ортогональным преобразованием координат может быть приведена к каноническому виду:

$$q(x) = \sum_i \lambda_i x_i^2 \ ,$$

где $\lambda_i -$ собственные значения матрицы квадратичной формы.

Алгоритм приведения:

1. Найти собственные значения матрицы квадратичной формы
2. Найти собственные векторы (**ВНИМАНИЕ!** собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, должны получиться **ортогональными**)
3. Если собственное значение кратное, выбрать линейно независимые собственные векторы (фундаментальную систему решений соответствующей СЛУ) и произвести процесс ортогонализации этих векторов

Ортонормированный базис из собственных векторов и есть канонический базис. Канонический вид определяется собственными значениями.

1.4 Пример (метод Лагранжа): найти канонический базис и каноническую форму для $q = x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$

Матрица квадратичной формы q в стандартном базисе:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ситуация из шага 2 : все $a_{ii} = 0$. Выбираем $a_{12} = \frac{1}{2} \neq 0$. Делаем замену:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2 \\ x_2 &= y_1 - y_2 \\ x_3 &= y_3 \end{aligned}$$

Матрица перехода к новым координатам y:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Форма q в новых координатах (выполняем замену):

$$q = y_1^2 - y_2^2 - 4(y_1 + y_2)y_3 + 2(y_1 - y_2)y_3 = \underline{y_1^2} - y_2^2 - \underline{2y_1y_3} - 6y_2y_3$$

Подчеркнуты члены содержащие y_1, т.к. мы переходим к шагу 1 и $a_{11} = 1 \neq 0$. Выделяем полный квадрат (из подчеркнутых слагаемых):

$$q = ((y_1 - y_3)^2 - y_3^2) - y_2^2 - 6y_2y_3 = (y_1 - y_3)^2 - y_3^2 - y_2^2 - 6y_2y_3$$

Выполняем замену:

$$\begin{aligned} y_1 - y_3 &= z_1 \\ y_2 &= z_2 \\ y_3 &= z_3 \end{aligned}$$

Или:

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 + z_3 \\ y_2 &= z_2 \\ y_3 &= z_3 \end{aligned}$$

Матрица перехода к новым координатам z:

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Форма q в новых координатах:

$$q = z_1^2 - \underline{z_2^2} - z_3^2 - \underline{6z_2z_3}$$

Выделяем полный квадрат:

$$q = z_1^2 - \Big((z_2 + 3z_3)^2 - (3z_3)^2\Big) - z_3^2 = z_1^2 - (z_2 + 3z_3)^2 + 8z_3^2$$

Замена:

$$\begin{aligned} z_1 &= t_1 \\ z_2 + 3z_3 &= t_2 \\ z_3 &= t_3 \end{aligned}$$

Или:

$$\begin{aligned} z_1 &= t_1 \\ z_2 &= t_2 - 3t_3 \\ z_3 &= t_3 \end{aligned}$$

Матрица перехода к новым координатам t:

$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Форма q в новых координатах:

$$q = t_1^2 - t_2^2 + 8t_3^2 = t_1^2 - t_2^2 + (2\sqrt{2}t_3)^2$$

Чтобы последний коэффициент стал равен 1, нужно еще одно преобразование:

$$t_1 = s_1;\ t_2 = s_2;\ 2\sqrt{2}t_3 = s_3$$

Матрица перехода к новым координатам s:

$$C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Форма q в новых координатах (канонический вид):

$$q = s_1^2 - s_2^2 + s_3^2$$

Инварианты формы q: $r_+ = 2,\ r_- = 1,\ r = 3$, форма невырождена.
Координаты векторов канонического базиса – это столбцы матрицы $C = C_1C_2C_3C_4$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/\sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1/2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Проверка правильности вычислений:

$$C^TQC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.5 Пример приведения к каноническому виду ортогональным преобразованием

$$q(x) = 5x^2 + 4xy + 8y^2$$

Матрица формы:

$$Q = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Характеристический многочлен:

$$p_Q(t) = \begin{vmatrix} 5-t & 2 \\ 2 & 8-t \end{vmatrix} = (5-t)(8-t) - 4 = t^2 - 13t + 36$$

Собственые значения (корни $p_Q(t)$): $\lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = 9$

Канонический вид: $4x^2 + 9y^2$

Собственыые векторы ($\lambda = 4$):

$$\begin{pmatrix} 5-4 & 2 \\ 2 & 8-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e'_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 9$:

$$\begin{pmatrix} 5-9 & 2 \\ 2 & 8-9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e'_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Заметим, что $(e'_1, e'_2) = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 0$, т.е. $e'_1 \perp e'_2$ (см. предупреждение выше)

Нормируя, получаем канонический базис:

$$e_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right), \ e_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

т.к. $|e'_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}, \ |e'_2| = \sqrt{5}$