Структура линейного оператора

- Собственные векторы и собственные значения
- Характеристический многочлен
- Пример вычислений
- Собственные и корневые подпространства
- Жорданова клетка
- Жорданова нормальная форма
- Канонический базис
- Пример

В этой теме основное поле $-$ поле комплексных чисел.

$f : L \to L$ $-$ линейный оператор на L и $\dim L = n$

Собственные векторы и собственные значения

Собственные векторы и собственные значения

Собственным вектором (далее СВ) линейного оператора $f : L \to L$, соответствующим собственному значению (далее СЗ) λ называется ненулевой вектор $v \in L$, удовлетворяющий условию $f(v) = \lambda v$

Собственные векторы и собственные значения

Собственным вектором (далее СВ) линейного оператора $f : L \to L$, соответствующим собственному значению (далее СЗ) λ называется ненулевой вектор $v \in L$, удовлетворяющий условию $f(v) = \lambda v$

Для нахождения СВ нужно решить однородную СЛУ $(A - \lambda \cdot E)x = 0$ (A – матрица оператора, E – единичная)

Примеры:

1. Оператор гомотетии $f(x) = \alpha x$, имеет единственное СЗ α и любой вектор пространства является собственным
2. $f : R^2 \to R^2$; $f : (x, y) \mapsto (y, x)$ имеет ровно два СЗ ± 1. СВ, соответствующие $\lambda = 1$, имеют вид (x, x), а для $\lambda = -1$, вид $(x, -x)$.

Характеристический многочлен

Характеристический многочлен

Характеристическим многочленом (далее ХМ) оператора f называется многочлен $P_f(t) = \det(A - t \cdot E)$, где A – матрица оператора в произвольном базисе, E – единичная матрица.

Характеристический многочлен

Характеристическим многочленом (далее ХМ) оператора f называется многочлен $P_f(t) = \det(A - t \cdot E)$, где A – матрица оператора в произвольном базисе, E – единичная матрица.

ХМ не зависит от выбора базиса.

Характеристический многочлен

Характеристическим многочленом (далее ХМ) оператора f называется многочлен $P_f(t) = \det(A - t \cdot E)$, где A – матрица оператора в произвольном базисе, E – единичная матрица.

ХМ не зависит от выбора базиса.

Число λ является СЗ тогда и только тогда, когда $P_f(\lambda) = 0$, т.е. λ – корень ХМ. Кратность корня называется кратностью СЗ.

Сумма кратностей различных СЗ равна $\dim L = \deg P_f(t)$.

Master algebra

Характеристический многочлен

Характеристическим многочленом (далее ХМ) оператора f называется многочлен $P_f(t) = \det(A - t \cdot E)$, где A – матрица оператора в произвольном базисе, E – единичная матрица.

ХМ не зависит от выбора базиса.

Число λ является СЗ тогда и только тогда, когда $P_f(\lambda) = 0$, т.е. λ – корень ХМ. Кратность корня называется кратностью СЗ.

Сумма кратностей различных СЗ равна $\dim L = \deg P_f(t)$.

В примере 2:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \; A - t \cdot E = \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix}; \; P_f(t) = \det(A - tE) = t^2 - 1$$

Вычисления для примера 2

Master algebra

Вычисления для примера 2

Так как $P_f(t) = \det(A - tE) = t^2 - 1$, то $\lambda = \pm 1$. Для $\lambda = 1$:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Система (см. здесь) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; -x + y = 0 \;\Rightarrow\; y = x$$

т.е. СВ для $\lambda = 1$ имеют вид $(x,\ x)$. Для $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; x + y = 0 \;\Rightarrow\; y = -x$$

т.е. СВ для $\lambda = -1$ имеют вид $(x,\ -x)$.

Собственные и корневые подпространства

Собственные и корневые подпространства

Подпространство $L_0 \subset L$ называется собственным подпространством оператора f , если $f(L_0) \subset L_0$, т.е.

$\forall x \in L_0 : \; f(x) \in L_0$

Master algebra

Собственные и корневые подпространства

Подпространство $L_0 \subset L$ называется собственным подпространством оператора f , если $f(L_0) \subset L_0$, т.е. $\forall x \in L_0 : \; f(x) \in L_0$

Подпространство $L(\lambda)$ называется корневым подпространством соответствующим собственному значению λ , если $\forall x \in L(\lambda) \; \exists k : \; (f - \lambda \cdot I)^k(x) = 0$, где $(f - \lambda \cdot I)(x) = f(x) - \lambda \cdot x$ т.е. $I -$ тождественный оператор.

Master algebra

Собственные и корневые подпространства

Подпространство $L_0 \subset L$ называется собственным подпространством оператора f , если $f(L_0) \subset L_0$, т.е. $\forall x \in L_0 : \ f(x) \in L_0$

Подпространство $L(\lambda)$ называется корневым подпространством соответствующим собственному значению λ , если $\forall x \in L(\lambda) \ \exists k : \ (f - \lambda \cdot I)^k (x) = 0$, где $(f - \lambda \cdot I)(x) = f(x) - \lambda \cdot x$ т.е. $I -$ тождественный оператор.

Корневое подпространство является собственным, но не наоборот. Размерность $L(\lambda)$ равна кратности λ.

В примере 2: $L(1) -$ это прямая $y = x$; $L(-1) -$ это прямая $y = -x$

Жорданова клетка

Жорданова клетка

Жордановой клеткой порядка r со значением λ называется $r \times r$-матрица (на главной диагонали λ, на побочной 1):

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Заметим, что $(J_r(0))^r = 0$ и $(J_r(0))^k \neq 0$ при $k < r$

Задача: Вычислить $(J_r(\lambda))^k$ для всех k

Master algebra

Жорданова нормальная форма

Пусть f имеет различные СЗ $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ кратности $r_1, \ldots, r_s$. Найдется такой базис, в котором матрица оператора имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} J_{r_{11}}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_{1k_1}}(\lambda_1) \end{matrix}\right\} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \left.\begin{matrix} J_{r_{s1}}(\lambda_s) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r_{sk_s}}(\lambda_s) \end{matrix}\right\} r_s \end{pmatrix}$$

где на диагонали жордановы клетки, остальные элементы равны 0 и $\sum_{j=1}^{k_i} r_{ij} = r_i$

Пример

Master algebra