1 Линейные отображения

1.1 Определение

Отображение $f : L \to M$ линейного пространства L в линейное пространство M над полем F называется **линейным**, если $f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b)$, для любых $a,\ b \in L$ и любых $\alpha,\ \beta \in F$.

Иначе, отображение $f : L \to M$ линейных пространств называется линейным, если $f(a+b) = f(a) + f(b)$ и $f(\alpha a) = \alpha f(a)$, для любых $a,\ b \in L$ и любых $\alpha \in F$.

Таким образом, линейное отображение линейных пространств – это такое отображение множества L в M, которое сохраняет операции.

Другими словами при линейных отображениях образ суммы равен сумме образов и образ произведения на число равен произведению образа на число.

Линейное отображение из L в L называется линейным **оператором** на L или линейным **преобразованием**.

Матрица, столбцами которой являются координаты векторов $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$ называется **матрицей линейного преобразования** f в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$.

Т.е. матрица линейного преобразования в базисе $e_1, \ldots, e_n$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} f(e_1) & \ldots & f(e_n) \\ \vdots & \ldots & \vdots \end{pmatrix}$$

Если слева умножить матрицу линейного преобразования на столбец координат вектора x, то получится столбец координат образа $f(x)$.

1.2 Матрицы и линейные отображения арифметических пространств

Пусть дана матрица размера $n \times k$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix}$$

Тогда с помощью матрицы A можно определить линейное отображение арифметических пространств $f_A : R^k \to R^n$ следующим образом:

$$f_A(x) = A \cdot x \text{ (доказать линейность } f_A \text{ !)},$$

где справа написано произведение матрицы A на вектор столбец $x \in R^k$. Результатом произведеия $n \times k$-матрицы A на $k \times 1$-матрицу x является $n \times 1$-матрица $f_A(x)$, т.е. образ $f_A(x)$ вектора x при отображении f_A принадлежит R^n.

Любое отображение арифметических линейных пространств имеет вид f_A для некоторой матрицы A (**доказать!**).

1.3 Ядро и образ

Ядром линейного отображения $f : L \to M$ называется подмножество элементов из L, переходящих в 0. Формальная запись:

$$\ker f = \{x \in L \mid f(x) = 0\} \subset L$$

Образом линейного отображения $f : L \to M$ называется подмножество элементов из M, имеющих хотя бы один прообраз. Формальная запись:

$$\mathrm{im}\ f = \{y \in M \mid \exists x : f(x) = y\} \subset M$$

Ядро и образ являются подпространствами в L и M соответсвенно.

Согласно определению, ядро отображения f_A – это множество решений однородной системы $A \cdot x = 0$, а образ отображения f_A – это множество таких b, для которых уравнение $A \cdot x = b$ имеет хотя бы одно решение.

Теорема о ядре и образе: для любого линейного отображения $f : L \to M$ имеет место формула:

$$\dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \dim L \ ,$$

т.е. сумма размерностей ядра и образа равна размерности L.

Соответствие понятий теории линейных отображений и теории систем линейных уравнений:

Системы лин. уравнений	Линейные отображения
Матрица системы	Матрица лин. отображения
фунд. система реш.	базис ядра
базисные столбцы	базис образа
ранг системы	размерность образа
дефект системы	размерность ядра
число неизв.	$\dim L$
дефект + ранг = число неизв.	теор. о ядре и образе

2 Примеры

Умножение на число является линейным отображением произвольного линейного пространства в себя (почему?).

Прибавление ко всем векторам фиксированного вектора не является линейным отображением (почему?).

Линейные отображения одномерного пространства в себя – это в точности умножения на некоторое число (доказать!).

Линейные отображения из k-мерного пространства в n-мерное – это в точности умножения на матрицу размера $n \times k$ (доказать!).

2.1 Пример линейного отображения из R^4 в R^3

Пусть дана матрица 3×4 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

так как для $x = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ имеем :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

то:

$$f_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

в частности, для $x = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$ имеем:

$$f_A(x) = \begin{pmatrix} 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix}$$

т.е. образом вектора $x = (1,\ 1,\ 1,\ 1) \in R^4$ при отображении f_A будет вектор $y = (10,\ 18,\ 0) \in R^3$