1 Линейные пространства

1.1 Определение

Множество L с двумя бинарными операциями (сложением и умножением на элементы некоторого поля скаляров F) называется *линейным пространством* **над полем** F, если:

- по сложению L абелева группа
- выполнены аксиомы дистрибутивности:
  $\alpha \cdot (a + b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b, \quad \alpha \in F,\ a, b \in L$
  $(\alpha + \beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a, \quad \alpha, \beta \in F,\ a \in L$
- выполнена аксиома нейтрального элемента: $1 \cdot a = a$
- выполнена аксиома ассоциативности: $(\alpha \cdot \beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a)$

1.2 Базис и размерность

Понятия ``линейная комбинация'', ``линейная (не)зависимость'' и т. п. определяются точно также как и для арифметических пространств.

Система векторов линейного пространства называется *полной*, если любой вектор пространства выражается через векторы системы.

Полная и линейно независимая система векторов линейного пространства называется *базисом* линейного пространства.

Пространство называется конечномерным, если в нем имеется конечный базис, (базис состоящий из конечного числа элементов).

Все базисы конечномерного пространства имеют одинаковое число элементов. Это число называется *размерностью* линейного пространства.

1.3 Примеры линейных пространств

1. Арифметическое линейное пространство R^n (размерность n -- почему?)
2. Линейное пространство многочленов степени не выше n (размерность $n + 1$ -- почему?)
3. Линейное пространство функций непрерывных на отрезке (бесконечномерное -- почему?)
4. Линейное пространство решений однородной системы линейных уравнений (размерность равна дефекту (количеству свободных неизвестных) системы -- почему?)