Матрицы (введение)

- Определение
- Транспонированная матрица
- Операции над матрицами
- Умножение матриц
- Свойства операций
- Определители 2-го и 3-го порядка

Определения

Определения

Матрица (далее М) размера $k \times n$ — это прямоугольная таблица чисел с k строками и n столбцами:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} — элемент находящийся на пересечении i-ой строки и j-ого столбца. Если $n = k$, то М называется квадратной (далее КМ).

Определения

Элементы вида a_{ii} составляют (главную) диагональ КМ

КМ вида:

$$E = E_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(на даигонали 1, остальные нули), называется единичной порядка n.

Если все недиагональные элементы М равны 0, М называется диагональной (далее ДМ). Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Транспонированная матрица

Транспонированная матрица

Если М $A = (a_{ij})$, то транспонированная (далее ТМ) М – это матрица $A^T = (a_{ji})$. Т.е., если элемент x находится, скажем, в первом столбце и четвертой строке М A, то у ТМ x окажется в четвертом столбце и первой строке. Строки М A являются столбцами ТМ A^T и наоборот. Если A – размера $k \times n$, то A^T – размера $n \times k$. Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

тогда:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Операции над матрицами

Операции над матрицами

Матрицы одинакового размера можно складывать. Сложение выполняется покомпонентно, т.е. соответствующие элементы двух М складываются:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Матрицы можно умножать на число. Умножение выполняется покомпонентно, т.е. все элементы М умножаются на число:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц

Умножение матриц

Пусть A — $k \times n$-матрица и B — $m \times s$-матрица. Тогда $A \times B$ существует тогда и только тогда, когда $n = m$, (т.е. число столбцов (элементов в строке) левой матрицы равно числу строк (элементов в столбце) правой матрицы).

$C = A \cdot B$ — $k \times s$-матрица (имеет столько строк, сколько A и столько столбцов сколько B). Элементы матрицы C вычисляются по формуле (правило "строка на столбец"):

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot2+1\cdot6+2\cdot1 & 1\cdot4+1\cdot8+2\cdot1 \\ 1\cdot2+3\cdot6+4\cdot1 & 1\cdot4+3\cdot8+4\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 24 & 32 \end{pmatrix}$$

Свойства операций

Свойства операций

Для любых М A, B, C и любых чисел a, b имеют место равенства (если операции определены)

Определители (детерминанты) 2-го порядка

Определители (детерминанты) 2-го порядка

Определитель 2-го порядка $-$ это число, получающееся из 2×2-матицы по формуле:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$