1 Матрицы

1.1 Основные понятия

Если матрица $A = (a_{ij})$, то транспонированная матрица – это матрица $A^T = (a_{ji})$. Другими словами, если элемент x находится, скажем, в первом столбце и четвертой строке матрицы A, то у транспонированной матрицы x окажется в четвертом столбце и первой строке. Строки матрицы A являются столбцами матрицы A^T. Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \\ 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$$

тогда:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 10 \\ 1 & 5 & 20 \end{pmatrix}$$

Имеет место равенство:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

1.2 Обратная матрица

Обратная матрица для **невырожденной квадратной** матрицы A (т.е. $\det A \neq 0$) это единственная матрица, удовлетворяющая равенствам:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \ ,$$

где E – единичная матрица.

Для обратных матриц справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \\ (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \\ \det A^{-1} = (\det A)^{-1} \end{aligned}$$

Матрица, элементами которой являются алгебраические дополнения элементов A (алгебраические дополнения элементов каждой строки записываются в соответствующий столбец) называется **присоединенной** матрицей для A. Обозначим ее A^*

Матрица A^{-1} вычисляется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$$

или, обозначив элементы матрицы A^{-1} через b_{ij}:

$$b_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$$

▷ **обратите внимание на измененный порядок индексов !**

Быстрый способ вычисления обратной матрицы состоит в следующем:
рассматривается матрица $(A|E)$, над строками которой выполняются элементарные преобразования так, чтобы слева от черты получилась единичная матрица. Тогда справа от черты будет обратная матрица.

1.3 Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Находим алгебраические дополнения:

$$\begin{array}{ll} A_{11}=8 & A_{12}=-2 \\ A_{21}=-3 & A_{22}=1 \end{array}$$

Далее, $\det A = 2$. Имеем:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Второй способ:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

из второй строки вычтем удвоенную первую:

$$\left(\begin{array}{cc|rc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

из удвоенной первой строки вычтем утроенную вторую:

$$\left(\begin{array}{cc|rr} 2 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

поделим обе строки на 2:

$$\left(\begin{array}{cc|rr} 1 & 0 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Фадеев, Соминский, гл.4, пар. 2 “Обратная матрица”