1 Смена базиса

Пусть в линейном пространстве L размерности n выбрана пара базисов $\mathbf{e} = \{e_1; \ldots; e_n\}$ (‘‘старый базис’’) и $\mathbf{g} = \{g_1; \ldots; g_n\}$ (‘‘новый базис’’)

Тогда все векторы нового базиса могут быть однозначно выражены через векторы старого базиса (согласно определению базиса):

$$\begin{array}{rcl} g_1 & = & c_{11}e_1 + c_{12}e_2 + \ldots + c_{1n}e_n \\ g_2 & = & c_{21}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{2n}e_n \\ \vdots & & \vdots \\ g_n & = & c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n \end{array}$$

где c_{ij} -- некоторые элементы основного поля.

Выписав координаты векторов $g_1; \ldots; g_n$ в **столбцы**, получим матрицу:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \ldots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \ldots & c_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

(**обратите внимание на порядок индексов !!!**).

Эта матрица называется матрицей перехода от старого базиса $\mathbf{e}$ к новому базису $\mathbf{g}$.

Другими словами, в столбцы матрицы перехода выписываются координаты векторов нового базиса в старом.

Если некоторый вектор x из L имеет координаты:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

в старом базисе и координаты:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

в новом базисе.

Связь между этими координатами задается в матричном виде уравнениями:

$$CY = X, \ C^{-1}X = Y$$

Другими словами, матрица перехода от старого базиса к новому переводит новые координаты в старые и наоборот.

2 Способ нахождения матрицы перехода между базисами арифметического пространства

Пусть $\mathbf{e} = \{e_1; \ldots; e_n\}$ (‘‘старый базис’’) и $\mathbf{g} = \{g_1; \ldots; g_n\}$ (‘‘новый базис’’) в арифметическом пространстве R^n. Тогда для вычисления матрицы перехода нужно:

1. Выписать столбцы координат векторов из базиса $\mathbf{e}$ в $n \times n$ матрицу A.
2. Выписать столбцы координат векторов из базиса $\mathbf{g}$ в $n \times n$ матрицу B.
3. Вычислить матрицу перехода по формуле:

$$C = A^{-1} \cdot B$$

3 Примеры

3.1 Нахождение матрицы перехода в пространстве R^2

Даны два базиса: $\mathbf{e}: \ \ e_1 = (1, \ 2); \ \ e_2 = (0, \ 1)$ и $\mathbf{g}: \ \ g_1 = (2, \ 3); \ \ g_2 = (3, \ 4)$. Имеем (см. алгоритм выше):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Далее:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Окончательно, матрица перехода:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$2e_1 - e_2 = 2\binom{1}{2} + (-1)\binom{0}{1} = \binom{2}{3} = g_1$$
$$3e_1 - 2e_2 = 3\binom{1}{2} + (-2)\binom{0}{1} = \binom{3}{4} = g_2$$