1 Перестановки

Перестановка порядка n – это биективное отображение конечного множества из n элементов в себя.

Множество всех перестановок из n элементов обозначим $S_n,\ |S_n| = n!$.

Произведение перестановок:

$$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow \\ 2&3&1&4&7&5&6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow \\ 5&7&3&2&1&6&4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow \\ 7&3&5&2&4&1&6 \end{pmatrix}$$

Первая перестановка переводит один в два, а вторая переводит два в семь, значит произведение переводит один в семь и т. д. Умножение перестановок **некоммутативно**:

$$\tau\sigma \neq \sigma\tau$$

$$(5732164) \cdot (2314756) \ = \ (7613254) \neq (7352416)$$

Тождественная перестановка : $e = (12...n)$ – все элементы на своих местах.

Обратная перестановка для τ – это такая перестановка τ^{-1}, что

$$\tau \cdot \tau^{-1} = \tau^{-1} \cdot \tau = e$$

Пример для перестановки из (1) обратная перестановка:

$$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow \\ 3&1&2&4&6&7&5 \end{pmatrix}$$

Так как у исходной перестановки один переходит в два, то у обратной два переходит в один и т.д.

Решение уравнений вида $\tau x = \sigma,\ x\tau = \sigma$

$$x \ = \ \tau^{-1} \cdot \sigma$$

$$x \ = \ \sigma \cdot \tau^{-1}$$

Разложение в произведение циклов (единственно с точностью до порядка!):

$$\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7 \\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow \\ 2&3&1&4&7&5&6 \end{pmatrix} = [123][4][576] \tag{1}$$

1 переходит в 2, 2 в 3, 3 снова в 1 – первый цикл и т.д.

Число

$$d = n - \{\text{количество циклов}\}$$

называется декрементом перестановки. Четность декремента называется четностью перестановки, т.е. четность перестановки равна +1, если декремент четен, и равна -1, если декремент нечетен. В примере (1) декремент равен 7-3=4, четность равна +1 или перестановка четная.

Инверсия – это ситуация, когда большее число предшествует меньшему. Оказывается четность числа инверсий равна четности перестановки.

В примере (1) двойка составляет одну инверсию (с единицей), тройка одну инверсию (с единицей), 4 не составляет инверсий, 7 составляет две инверсии, 5 не составляет инверсий. Общее число инверсий равно 1+1+0+0+2+0=4 (совпадение с декрементом случайно)

Транспозиция – это перестановка, у которой все элементы кроме двух остаются на своих местах, а два элемента переставлены. Обозначение: (ij), если порядок перестановки известен. Пример: $(12543) = (35)$

Любая перестановка разлагается в произведение транспозиций (разложение неоднозначно!):

$$\begin{pmatrix} {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 5} & {\scriptstyle 6} & {\scriptstyle 7} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (12)(13)(57)(56)$$

Для получения этого разложения из разложения (1) используется формула:

$$[i_1 \dots i_k] \; = \; (i_1 i_2) \dots (i_1 i_k) \ ,$$

представляющая разложение цикла в произведение транспозиций.