1 Многочлены (полиномы)

Многочлен $f(x)$ – это выражение вида $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$, где a_i произвольные (вещественные или комплексные) коэффициенты, причем $a_n \neq 0$. Число n называется степенью многочлена и обозначается $\deg f$.

Многочлен однозначно определяется набором своих коэффициентов.

Многочлены складываются и умножаются на число покомпонентно.

Произведение многочленов определяется по следующей формуле:

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i \cdot b_j \ ,$$

где a_i – коэффициенты многочлена $f = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$, b_j – коэффициенты многочлена $g = b_0 + b_1 \cdot x + \ldots + b_m \cdot x^m$, а c_k – коэффициенты произведения $h = f \cdot g$. Откуда видно, что $\deg h = \deg g + \deg f$. Пример: $c_2 = a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0$.

Говорят, что многочлен f делит многочлен h, если найдется такой многочлен g, что $h = f \cdot g$, говорят также, что h делится на f.

Наибольший общий делитель (НОД) двух многочленов f и g – это такой многочлен d, который делит оба многочлена f и g и делится на любой другой многочлен, который делит f и g.

НОД всегда существует и определен с точностью до умножения на число.

Для любых многочленов f и g найдутся однозначно определенные многочлены q и r, такие что $f = g \cdot q + r$ и $\deg r < \deg g$. Нахождение q и r осуществляется также как <<деление столбиком>> чисел в школе.

1.1 Алгоритм Евклида нахождения НОД(f, g)

Найдутся однозначно определенные многочлены q_i и r_i такие что:

$$\begin{aligned} f &= g \cdot q_1 + r_1 \\ g &= r_1 \cdot q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2 \cdot q_3 + r_3 \\ \ldots & \ldots \ldots \\ r_{n-2} &= r_{n-1} \cdot q_n + r_n \\ r_{n-1} &= r_n \cdot q_{n+1} \end{aligned} \tag{1}$$

последний ненулевой остаток (в данном случае r_n) и есть НОД.

Для любых двух многочленов f и g найдутся многочлены u и v, такие что $f \cdot u + g \cdot v =$ НОД(f, g). Для их нахождения нужно выразить r_1 через f и g в первой из формул (1), подставить во вторую, потом выразить r_2 через f и g во второй из формул (1) и подставить выражения для r_1 и r_2 в третью формулу и т. д., пока не получим выражения для r_n.

1.2 Корни многочлена

Число a называется корнем многочлена f, если $f(a) = 0$.

a – корень многочлена $f \quad \Leftrightarrow \quad x - a$ делит f (теорема Безу)

Говорят, что a – корень кратности k многочлена f, если $(x-a)^k$ делит f и $(x-a)^{k+1}$ не делит f.

Сумма кратностей комплексных корней многочлена равна его степени.

Любой многочлен $f = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ над полем комплексных чисел представляется в виде:

$$f = a_n (x - x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_s)^{k_s} \ ,$$

где x_i – различные корни многочлена, k_i – их кратности. Причем:

$$k_1 + \ldots + k_s = n$$

Если комплексное число z – корень многочлена с вещественными коэффициентами, то число $\overline{z}$ – также корень этого многочлена.

1.3 Схема Горнера

Применяется для деления многочлена $f = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n$ степени n на одночлен $(x - a)$. Во-первых:

$$f(x) = g(x) \cdot (x - a) + f(a)$$

$g = b_0 + b_1 \cdot x + \ldots + b_{n-1} \cdot x^{n-1}$ – многочлен степени $n - 1$, причем его коэффициенты находятся по формулам:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= b_{n-1} \cdot a + a_{n-1} \\ b_{n-3} &= b_{n-2} \cdot a + a_{n-2} \\ \ldots & \ldots \ldots \\ b_0 &= b_1 \cdot a + a_1 \\ f(a) &= b_0 \cdot a + a_0 \end{aligned} \tag{2}$$

Результаты вычислений последовательно записывают в таблицу, где слева во второй строке пишется a, первая строка состоит из коэффициентов многочлена f, а вторая последовательно составляется из коэффициентов многочлена g:

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0
a	b_{n-1}	b_{n-2}	$\ldots$	b_0	$f(a)$

1.4 Интерполяционный многочлен Лагранжа

Существует единственный многочлен $f,\ \deg f \leq n$, принимающий в данных $n+1$ точках $x_0; \ldots; x_n,\ x_i \neq x_j$ при $i \neq j$ данные $n+1$ значение $a_0; \ldots; a_n$, т.е. $f(x_i) = a_i$ для всех i.

Этот многочлен задается формулой:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \frac{(x - x_0) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_n)}$$

и называется интерполяционным многочленом Лагранжа.

1.5 Разложение на простейшие дроби

Пусть имеется дробь $\frac{f}{g}$, где f и g произвольные многочлены, представив f в виде $f = g \cdot q + r$, мы можем выделить целую часть:

$$\frac{f}{g} = q + \frac{r}{g},$$

где $\frac{r}{g}$ – правильная дробь (т.е. $\deg r < \deg g$).

Пусть теперь $g = a_n(x - x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_s)^{k_s}$, где $x_1, \ldots, x_s$ – различные комплексные корни многочлена g, тогда дробь $\frac{r}{g}$ может быть представлена в виде:

$$\frac{r}{g} = \frac{A_{11}}{x - x_1} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \ldots + \frac{A_{s1}}{x - x_s} + \ldots + \frac{A_{sk_s}}{(x - x_s)^{k_s}} \tag{3}$$

Для того, чтобы найти вещественное разложение для многочленов с вещественными коэффициентами, нужно в разложении $g = a_n(x-x_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-x_s)^{k_s}$ перемножить скобки, соответствующие сопряженным корням, а в формуле (3) заменить слагаемые, соответствующие паре сопряженных корней на слагаемые вида:

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$$

Неопределенные коэффициенты A_{ij} в формуле (3) находятся приведением к общему знаменателю и приравниванием коэффициентов в числителях.

2 Примеры

2.1 Найти значение многочлена

$$f = 4x^5 - 10x^4 + 20x^3 - 41x^2 + x - 5$$

в точке $x_0 = 2$

	a_5 $\downarrow$	a_4 $\downarrow$	a_3 $\downarrow$	a_2 $\downarrow$	a_1 $\downarrow$	a_0 $\downarrow$
a $\downarrow$	4	-10	20	-41	1	-5
2						
	$\uparrow$ b_4	$\uparrow$ b_3	$\uparrow$ b_2	$\uparrow$ b_1	$\uparrow$ b_0	$\uparrow$ $f(a)$

$b_{n-1} = a_n$

	4	-10	20	-41	1	-5
2	4					

$b_{n-2} = b_{n-1} \cdot a + a_{n-1}$

	4	-10	20	-41	1	-5
2	4	-2				

$2 \cdot (-2) + 20 = 16$

	4	-10	20	-41	1	-5
2	4	-2	16			

$2 \cdot 16 - 41 = -9$

	4	-10	20	-41	1	-5
2	4	-2	16	-9		

$2 \cdot (-9) + 1 = -17$

	4	-10	20	-41	1	-5
2	4	-2	16	-9	-17	

$2 \cdot (-17) - 5 = -39$

	4	-10	20	-41	1	-5
2	4	-2	16	-9	-17	$\mathbf{-39}$

Имеем:

$$\begin{aligned}
g(x) &= 4x^4 - 2x^3 + 16x^2 - 9x - 17 \\
f(x) &= g(x) \cdot (x-2) - 39 \\
f(x) &= (4x^4 - 2x^3 + 16x^2 - 9x - 17) \cdot (x-2) - 39 \\
f(2) &= -39
\end{aligned}$$

Прямое вычисление: $f(2) = 4 \cdot 32 - 10 \cdot 16 + 20 \cdot 8 - 41 \cdot 4 + 2 - 5 = -39$

2.2 Нахождение разложения для НОД(f, g)

Пусть

$$\begin{aligned} f &= 2+2x+x^2+x^3 \\ g &= -1+x^2 \end{aligned}$$

Найдем НОД(f, g):

$$\begin{aligned} 2+2x+x^2+x^3 &= (-1+x^2)(1+x)+(3+3x) \\ -1+x^2 &= (3+3x)\cdot(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x) \end{aligned}$$

Откуда НОД$(f, g) = 3+3x$, проще взять НОД$(f, g) = 1+x$
Получим из последней выкладки выражение для НОД:

$$f-(1+x)g = 3+3x$$

Или:

$$\frac{1}{3}f-(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}x)g = 1+x$$

Итак $u = \frac{1}{3},\ v = -\frac{1}{3}-\frac{1}{3}x$

2.3 Нахождение разложения для НОД(f, g)

Пусть

$$\begin{aligned} f &= -2-4x-x^2+2x^3+x^4 \\ g &= -2-2x-x^2+x^3+x^4 \end{aligned}$$

Алгоритм Евклида:

$$\begin{aligned} f &= g\cdot 1+(-2x+x^3) \\ g &= (-2x+x^3)\cdot(1+x)+(-2+x^2) \\ -2x+x^3 &= (-2+x^2)\cdot x+0 \end{aligned}$$

НОД$(f,\ g) = -2+x^2$ (последний ненулевой остаток)
Последовательно выражаем остатки через f и g:

$$\begin{aligned} -2x+x^3 &= f-g \\ g &= (f-g)\cdot(1+x)+(-2+x^2) \Rightarrow \\ -2+x^2 &= (2+x)\cdot g-(1+x)\cdot f \end{aligned}$$

2.4 Разложение многочлена $f = -3 + x - 2x^2 + x^4$ по степеням $x - 1$

Многократно применяем схему Горнера, выделенные числа и есть коэффициенты разложения:

	1	0	-2	1	-3
1	1	1	-1	0	$\mathbf{-3}$
1	1	2	1	$\mathbf{1}$	$\times$
1	1	3	$\mathbf{4}$	$\times$	$\times$
1	1	$\mathbf{4}$	$\times$	$\times$	$\times$
1	$\mathbf{1}$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

$f = -3 + (x-1) + 4(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4$

2.5 Интерполяционный многочлен Лагранжа

Найти параболу $f(x)$ проходящую через точки $(-2;-3),\ (0;4),\ (1;2)$

Имеем $f(-2) = -3,\ f(0) = 4,\ f(1) = 2$, или:

$$x_0 = -2,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1$$
$$a_0 = -3,\ a_1 = 4,\ a_2 = 2$$

Сотласно формуле интерполяционного многочлена Лагранжа:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 \cdot \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)} + a_1 \cdot \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)} + a_2 \cdot \frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)} = \\ &= (-3)\cdot\frac{(x-0)\cdot(x-1)}{(-2-0)\cdot(-2-1)} + 4\cdot\frac{(x-(-2))\cdot(x-1)}{(0-(-2))\cdot(0-1)} + 2\cdot\frac{(x-(-2))\cdot(x-0)}{(1-(-2))\cdot(1-0)} = \\ &= -\frac{11}{6}x^2 - \frac{1}{6}x + 4 \end{aligned}$$

Проверим:

$$\begin{aligned} f(-2) &= -\frac{11}{6}\cdot(-2)^2 - \frac{1}{6}\cdot(-2) + 4 = -3 \\ f(0) &= -\frac{11}{6}\cdot 0^2 - \frac{1}{6}\cdot 0 + 4 = 4 \\ f(1) &= -\frac{11}{6}\cdot 1^2 - \frac{1}{6}\cdot 1 + 4 = 2 \end{aligned}$$

2.6 Разложить на простейшие дроби $\frac{x^2+4}{x^3-3x+2}$

Во-первых: $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2\cdot(x+2)$

Далее:

$$\frac{x^2+4}{x^3-3x+2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители, получим:

$$A(x-1)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x+2) = x^2 + 4$$

Приводя подобные члены:

$$(A+B)x^2 + (-2A+B+C)x + (A-2B+2C) = x^2 + 4$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты:

$$\begin{cases} A + B &= 1 \\ -2A + B + C &= 0 \\ A - 2B + 2C &= 4 \end{cases}$$

Решая систему, получим: $A = \frac{8}{9},\ B = \frac{1}{9},\ C = \frac{5}{3}$ Итак:

$$\frac{x^2+4}{x^3-3x+2} = \frac{8}{9(x+2)} + \frac{1}{9(x-1)} + \frac{5}{3(x-1)^2}$$

Выполнив приведение к общему знаменателю можно убедиться в справедливости последней формулы.

Фадеев, Соминский <<Сборник задач по высшей алгебре>>, Глава V, ‘‘Алгебра полиномов’’