1 Подпространства

1.1 Определение подпространства

Подмножество L_0 линейного пространства L называется *подпространством*, если оно само является линейным пространством относительно операций в L.

Другими словами, для того, чтобы множество L_0 было подпространством, необходимо и достаточно, чтобы для любых $a, b \in L_0$ и любого $\alpha \in F$ (F – основное поле) элементы $a + b$ и $\alpha \cdot a$ принадлежали бы L_0.

Другими словами, для того, чтобы множество L_0 было подпространством, необходимо и достаточно, чтобы для любых $a, b \in L_0$ и любых $\alpha, \beta \in F$ (F – основное поле) элемент $\alpha \cdot a + \beta \cdot b$ принадлежал бы L_0.

Формальная запись:

$L_0 \subset L$ – подпространство $\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a, b \in L_0,\ \forall \alpha, \beta \in F\ :\ \alpha \cdot a + \beta \cdot b \in L_0$

1.2 Примеры подпространств

- Подпространства в R^3 :
  1. $L_0 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_3 = 0\},\ \dim L_0 = 2$ – почему?
  2. $L_0 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_1 = x_2\},\ \dim L_0 = 2$ – почему?
  3. Любая плоскость или прямая, проходящая через начало координат
- Подмножества, не являющиеся подпространствами:
  1. Пара координатных прямых на плоскости
  2. Единичный круг на плоскости
  3. Луч на плоскости
  4. Любая плоскость или прямая, не проходящая через начало координат
  5. Множество точек пространства с целочисленными координатами

1.3 Смежные классы

Смежным классом по подпространству L_0 пространства L называется подмножество в L, состоящее из элементов вида $x + x_0$, где $x \in L$ – некоторый фиксированный элемент из L, а $x_0 \in L_0$ – произвольный элемент из L_0. Смежный класс обозначается $x + L_0$ или $[x]_{L_0}$ или $\overline{x}_{L_0}$, иногда L_0 в индексе опускается.

Смежные классы также называются *линейными многообразиями*.

Формальная запись определения:

$$x + L_0 = \{y \in L \mid \exists x_0 \in L_0\ :\ y = x + x_0\}$$

Два смежных класса по подпространству либо не пересекаются, либо совпадают.

Любой элемент принадлежит некоторому смежному классу по данному подпространству.

Примеры смежных классов:

1. Пусть $L = R^2$ и L_0 – координатная прямая $y = 0$ (ось абсцисс), тогда прямая $y = 1$ есть смежный класс $1 + L_0$
2. Вообще, любая прямая на плоскости, не проходящая через точку $(0,\ 0)$ является смежным классом по параллельной прямой, проходящей через точку $(0,\ 0)$, которая является подпространством в R^2

1.4 Линейные оболочки

Пусть $S \subset L$ – подмножество линейного пространства L. Дадим несколько эквивалентных определений линой оболочки множества S.

Линейная оболочка $< S >$ множества S – это минимальное подпространство в L содержащее S.

Линейная оболочка $< S >$ множества S – это пересечение всеж подпространств в L содержащих S.

Линейная оболочка $< S >$ множества S – это множество вида:

$$< S > = \ \{y = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k \mid \alpha_i \in F, \ x_i \in S\}$$

Другими словами, линейная оболочка – это подпространство всевозможных линейных комбинаций элементов из S.

Если $S = \{x_1; \ \ldots \ ; x_p\}$ то для $< S >$ вместо $< \{x_1; \ \ldots \ ; x_p\} >$ пишем $< x_1; \ \ldots \ ; x_p >$